**ESERCIZI GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO**

1. Si scriva l’equazione parametrica della retta passante per l’origine dello spazio parallela alla retta intersezione dei piani  e .
2. Si discutano al variare del parametro *k* le mutue posizioni dei seguenti piani:

. Per quali valori di *k* sono perpendicolari?

1. Si scriva l’equazione della retta dello spazio passante per l’origine e per il punto .
2. Discutere la risolubilità del seguente sistema al variare del parametro :.
3. Date le rette si dica per quali valori del parametro sono complanari, e se ne determini l’equazione del piano.
4. Si determini il piano contenente la retta , parallelo alla retta .
5. Determinare l’equazione cartesiana del piano passante per i punti dello spazio .
6. Dati il piano  e la retta si dica se sono paralleli o incidenti, e si trovi l’eventuale punto di intersezione.
7. Trovare l’equazione del piano passante per il punto  e contenente la retta di equazioni cartesiane .

**SOLUZIONI**

1. Scriviamo l’equazione della retta intersezione dei due piani in forma parametrica al fine di evidenziarne il vettore direzione: . L’equazione della retta cercata, in forma parametrica, è quindi: .
2. Vediamo se, ed eventualmente per quali, valori del parametro i piani sono paralleli (e, in tal caso, coincidenti, visto che ambedue passano per l’origine, essendo zero il termine noto delle rispettive equazioni):  se e soltanto se . In questo caso i piani sono paralleli (e coincidenti). Per tutti gli altri valori del parametro si intersecheranno nella retta (passante per l’origine) di equazione . Per  il sistema si riduce a  e questa è l’equazione dell’asse x.

Per vedere se possono essere perpendicolari, applicando la condizione di perpendicolarità tra piani nello spazio otteniamo . Poiché , l’equazione non ammette soluzioni reali: i due piani non possono quindi essere perpendicolari per alcun valore del parametro.

1. Scriviamo l’equazione parametrica della retta passante per l’origine  ed imponiamo il passaggio per il punto : .
2. .
3. . Di conseguenza .
4. Si osserva subito che la retta , che a sua volta è parallelo al piano  contenente la retta *r*. Di conseguenza, quest’ultimo è il piano cercato. Oppure, se non avessimo notato questo fatto, avremmo dovuto procedere così: tra tutti i piani a cui appartiene la retta *r*, rappresentati dall’equazione , si seleziona quello parallelo alla retta applicando la condizione di parallelismo .
5. **.**
6. . Retta e piano sono incidenti nel punto .
7. . Si mettono a sistema le ultime due equazioni trovate con la condizione di appartenenza del punto al piano: .

**PROBLEMI**

1. Dopo aver determinato l’equazione del piano  parallelo all’asse *x* e passante per i punti  e , si determini l’equazione della superficie conica avente semi-apertura di ampiezza , per asse la retta *r* perpendicolare al piano  e passante per l’origine, e per vertice il punto *V* di intersezione del piano  con la retta *r*.
2. Si studino, al variare del parametro *k*, le mutue posizioni dei piani . Si scriva l’equazione parametrica della retta intersezione dei piani nel caso , e l’equazione, sempre in forma parametrica, della retta ad essa perpendicolare passante per il punto .
3. E’ data la superficie conica di equazione . Si studino le intersezioni con i piani  al variare del parametro *k*.
4. Si determini l’equazione della superficie sferica con centro nell’origine e tangente al piano  di equazione .

**SOLUZIONI**

1. Scritta l’equazione generica del piano  si impone il passaggio per i punti dati: . La condizione di parallelismo con l’asse *x* , che in forma parametrica è rappresentato dal vettore direzione , porta alla determinazione del coefficiente *a*, in quanto . L’equazione del piano è . Ricaviamo l’equazione della retta *r*, asse del cono, imponendo la condizione di parallelismo con la direzione perpendicolare al piano, individuata dai coefficienti del piano stesso : . Si determina il vertice del cono imponendo la condizione  . L’equazione del cono si trova infine applicando la  con  e : .
2. Vediamo in quali casi i due piani possono risultare paralleli: . Per  i piani sono paralleli. Poiché  i due piani sono paralleli distinti.

Nel caso  le equazioni dei piani sono . Posto ad esempio  otteniamo . La direzione della retta è data dal vettore . La retta cercata appartiene al piano perpendicolare alla retta trovata, passante per il punto . Tale piano ha equazione , e il coefficiente *d* si ottiene imponendo il passaggio del piano per il punto : , di conseguenza l’equazione del piano è . Questo piano interseca la retta nel punto 

L’equazione della retta è quindi: .

1. Si studiano le soluzioni del sistema . Si tratta di ellissi se , di iperboli se , di una parabole se .
2. La misura del raggio della sfera è uguale alla distanza del centro dal piano tangente. Il punto di tangenza si ottiene intersecando il piano tangente con la retta passante per il centro e perpendicolare al piano, la cui direzione è data dal vettore . L’equazione della retta è quindi , ed il punto d’intersezione si ottiene sostituendo le coordinate del generico punto della retta nell’equazione del piano: . Da questo segue  e l’equazione della sfera è quindi .